確率のパラドックス

西山豊

〒533-8533 大阪市東淀川区大隅2-2-8 大阪経済大学 経営情報学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

「数学を楽しむ／確率のパラドックス」『理系への数学』2010年3月，Vol.43, No.3, 4-8に掲載

1．ペニーのゲーム

イギリスの知人であるスティーブ・ハンブルからメールが届く．ダレン・ブラウンというマジシャンがテレビで面白いゲームを紹介しているとやや興奮して伝えてきた．私は「マジシャン」と聞いただけで，この話に警戒したが，よく調べてみると数学的背景のある面白い確率の話題であることに気づいた．日本ではそれほど知られていない問題なので，以下，それを紹介していこう．

ここに，表と裏が均等に出るコインがある．そのコインを連続して投げて行き，その中で起こりそうな長さが3のパターンをAとBが予想し，自分が選んだパターンが相手より早く現れた方が勝ちということにする．たとえばAは「表表表」をBは「裏表表」を選択したとする．コインの表と裏は，英語ではHeadとTailになる．HeadとTailの頭文字をとってHとTで表と裏を表すことにすると，AはHHHを選択し，BはTHHを選択することになる．そして，コインを連続して投げて

HTHTHHHHTHHHTTTTHTHH…

のような並びの中から，HHHとTHHが早く出てきた方が勝ちとなる．

コインの表と裏は 1/2 の等確率である．３連の並び方は全部で$2^3=8$通りあり，これら８通りはどれも1/8の確率で出現するから，AとBがどれを選んでも公平なように思えるが，HHHとTHHでは後者が前者の７倍もの勝算がある．このことを読者は信じられようか？

2．推移律の成り立たないゲーム

この確率の話題は古くからあるが，日本ではあまり知られていない．1969年，ウォルター・ペニーが「娯楽数学」雑誌に発表したわずか10行の記事が最初である[1]．その後，マーチン・ガードナーは雑誌「サイエンティフィック・アメリカン」(1974年10月号) の数学ゲームの欄に，このゲームを詳しく紹介している[2]．２ヶ月遅れの「日経サイエンス」(1974年12月号)には，一松信による日本語の翻訳記事が掲載されている．読者の中には，この記事に記憶があるかも知れない．

長さが３のパターンでゲームを行った場合,Aがどのように選択しようとも,Bが必ず勝てる選択がある．Aの選択は全部で８通りあり，それぞれに勝つBの選択は表１の通りである．これによれば，HHHに対してはTHHを選択すると７倍の勝算があり，HHTに対してはTHHを選択すると３倍の勝算があり，HTHに対してはHHTを選択すると２倍の勝算がある．ここに，勝算，勝ち目のことをオッズ（Odds）と表記することもある．

Aの選択	Bの選択	Bの勝算 (Aに対する)
HHH	THH	7倍
HHT	THH	3倍
HTH	HHT	2倍
HTT	HHT	2倍
THH	TTH	2倍
THT	TTH	2倍
TTH	HTT	3倍
TTT	HTT	7倍

表１．Bの勝算

表１では，HHH より THH の方が強く，THH より TTH の方が強く，TTH より HTT の方が強く，HTT より HHT の方が強く，HHT より THH の方が強くなっている．つまり A にとって最強の選択というものがないのだ．この関係を表したのが図１で，真ん中の４つのパターンは巡回している．

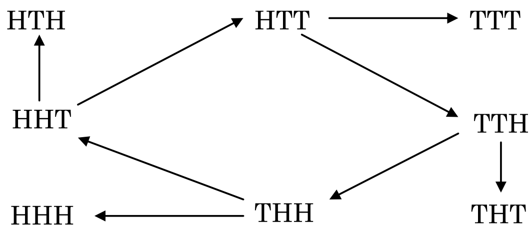

図１．８つのパターンの関係

数学では推移律が一般的に正しいとされている．

$$A \Rightarrow B \text{ かつ } B \Rightarrow C \text{ ならば } A \Rightarrow C$$

これを勝敗について書き換えると，「A が B に勝ち，B が C に勝つならば A は C に勝つ」になる．この命題は正しいだろうか？ガードナーはペニーのゲームは推移律が崩れる，非推移律的な関係（Nontransitive relations）としている[2]．このような関係は西洋では馴染まないが，日本のジャンケン遊びの「さんすくみ」の関係がそうである．グーがチョキに勝ち，チョキがパーに勝つとき，グーはパーに勝つか？　グーはパーに負けて推移律が成り立たない．ここで，ペニーのゲームは，ジャンケンと同じように最強の手はなく，後手必勝のゲームであることに気づく．

A の選択に対する B の選択にはつぎのような規則が存在する．A の選択が HHH だったとしよう．その場合，2 番目の文字は **H** である．これを変更して **T** として B の先頭に持ってくる．そして，A の先頭から 2 文字 HH を B の 2 番目と 3 番目にする．すると THH となり，これが A に勝つための B の選択である．この場合，A の 3 番目の文字 H は B の選択に関係していない．

$$\underline{\mathrm{H}\mathbf{H}}\mathrm{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}\underline{\mathrm{HH}}$$

読者は，表１の B の選択がすべてこの規則で成り立っていることを確かめること．長さが３の場合，B の選択は A の選択からこのような規則で決められるが，この方法は長さが３の場合にのみ成り立つもので，他の長さで同じアルゴリズムが成り立つとは必ずしも言えない．

ここで表１の倍率が正しいかどうか検討してみよう．まず，HHH の前に THH が現れる確率を求めてみよう．A が HHH を選んだとしよう．このときは無条件に A が勝利する．それ以外は B の勝利となる．HHH を選ぶ確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ であるから，

$$P(THH\ before\ HHH) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

となる．B の勝算は $\frac{7}{8} \div \frac{1}{8} = 7$ で，７倍となる．

つぎに HHT の前に THH が現れる確率を求めてみよう．HHT または HHHT または HHHHT…が起こる確率の合計は，

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1/8}{1-1/2} = \frac{1}{4}$$

である．この値は HHT が勝つ確率である．THH が勝つ確率は HHT が勝つ確率の余事象であるから，

$$P(THH\ before\ HHT) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となる．Bの勝算は$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3$より３倍となる．

つぎにHTHの前にHHTが現れる確率を計算しよう．

$$x = P(HHT\ before\ HTH)$$

とする．先頭がTの場合は無視することができる．先頭がHとして次に来るのがHであるなら1/2の確率でHHTになることができる．しかし，Tであるなら振り出しにもどって次のHを待つ．そして，それがxに等しくなる．式で示すと，

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x$$

となり，これを解いて，

$$x = \frac{2}{3}$$

を得る．Bの勝算は$\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} = 2$より２倍となる．このようにして，それぞれの対戦に対して確率が個別に計算されるが，一般性をもたせたコンウェイの算法というものがある．それを次の節で説明しよう．

３．コンウェイの算法

ジョン・コンウェイはAに対するBの勝算（オッズ）を簡単に計算できるアルゴリズムを考案した．コンウェイはパターンとパターンが重なる度合いを示す指標として先導数(leading numbers)というものを導入した．あるパターンは先行するパターンの中にどれだけの重複があるかを示す指標でもあり，ここでは考案者の名前を取ってコンウェイ数ということにしておこう．

Aの選択がHHH，Bの選択がTHHの場合を例にしてコンウェイの算法を説明しよう．

```
A − H H H
B − T H H
```

まず，Aに対するAの（A自身の）コンウェイ数を求めてみよう．A-HHHの上にA-HHHを置く．そして上段のHHHが下段と同一であれば１を，違えば０を上段のHHHの先頭のHの上に記入する．

```
    1
A − H H H
A − H H H
```

つぎに，上段のHHHから先頭のHをはずしてHHとし，それを下段に前詰めで重ねる．そして，HHを下段の先頭から２文字と比較して，これが同一であれば１を，違えば０を上段のHHの先頭のHの上に記入する．

```
1          1
H H        H
H H H      H H H
```

上段の文字が最後になるまで，この作業を繰り返し，それらをまとめて書くと次のようになる．

```
    1 1 1
A − H H H
A − H H H
```

このようにして求めた２進数111はAに対するAの重なりを示す指標で，コンウェイ数$AA = 111$と記述する．

下段に対する上段のコンウェイ数は，組み合わせとして合計$2\times 2=4$通りある．AA, AB, BB, BA をそれぞれ求めると次のようになる．

1 1 1 = 7	0 0 0 = 0
A − H H H	A − H H H
A − H H H	B − T H H
1 0 0 = 4	0 1 1 = 3
B − T H H	B − T H H
B − T H H	A − H H H

コンウェイ数は２進数として求まるが，２進数は 10 進数に変換され,

$$AA=7,\ AB=0,\ BB=4,\ BA=3$$

となる．そして，この４つのコンウェイ数を使って B の勝算（オッズ）が$(AA-AB)/(BB-BA)$で計算される．この式に，上の４つの値を代入すると

$$\frac{AA-AB}{BB-BA}=\frac{7-0}{4-3}=7$$

となる．B の勝算は７となったが，この値は表１の先頭の７倍と一致する．

また，A が勝つ確率を p, B が勝つ確率をq とすると，$p+q=1$より

$$p=\frac{1}{1+7}=\frac{1}{8},\ q=\frac{7}{1+7}=\frac{7}{8}$$

となる．

A の選択は８通りあり，B の選択は８通りある．それぞれの選択が独立にあるから合計$8\times 8=64$通りの対戦があり，それぞれに対して表２のような勝率がコンウエィの算法により自動的に計算される．この中から，B が A に対して勝つ中で最良の選択を抜き出すと表１になっている．コンウェイの算法は，長さが３のパターンだけでなく，すべての長さにおいて成り立ち，かつ、長さが違う場合も計算するので非常に強力な算法であるともいえる．

B＼A	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
HHH		1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
HHT	1/2		2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
HTH	3/5	1/3		1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
HTT	3/5	1/3	1/2		1/2	1/2	3/4	7/8
THH	7/8	3/4	1/2	1/2		1/2	1/3	3/5
THT	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2		1/3	3/5
TTH	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3		1/2
TTT	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	

表２． A と B の勝率（長さが３の場合）

４．平均待ち時間による証明

コンウェイ数による勝算のアルゴリズムは実にエレガントでパワフルである．コンウェイ数からどうして A と B の確率が計算されるのか，その理由を考えてみよう．エレガントな算法であるが，考案したコンウェイ自身は証明を論文にまとめていない．私は色々と文献を探してみたところ，スタンレー・コリングスの平

均待ち時間の概念を用いたものがわかりやすい証明であることがわかった[3]. コリングスの証明は３つの定理から成り立っている.

定理 X :

ゲームが自然数の集合$\{1, 2, \ldots, k\}$を要素にするとき, 与えられたパターンが現れる平均待ち時間は$k.AA$となる. （$k.AA$の$k.$は$k\times$の意味である.）

コインの表と裏$\{H, T\}$は$\{1, 2\}$に対応させることができる. A-HHH, B-THH は, それぞれ A-111, B-211 に対応し, コンウェイ数は AA=111, BB=100 である. 2 進数を 10 進数に変換すると AA=7, BB=4 となるが, それぞれ 2 倍して A と B の平均待ち時間は 14 と 8 になる.

定理 Y :

最初にパターン B があって，その後にパターン A が現れる平均待ち時間は$k.AA-k.BA$である.

たとえば，B-211 があって，その後に A-111 が現れる平均待ち時間は，$AA=7,\ BA=3$より，$k.AA-k.BA=2\times7-2\times3=8$となる.

定理 Z :

B が A より先に現れるとき，B の勝算は

$(AA-AB):(BB-BA)$で与えられる.

A の平均待ち時間が B の平均待ち時間より大きいとき，その差は

$$k(AA-BB)$$

で表される. 一方，定理 Y より，B が A より先行した状態で A が現れる平均待ち時間は,

$$k.AA-k.BA$$

である. 同様にして，A が B より先行した状態で B が現れる平均待ち時間は

$$k.BB-k.AB$$

である.

A が勝つ確率をp, B が勝つ確率をqとするとき，$k.AA-k.BA$はqの確率で，$k.BB-k.AB$はpの確率で起こるから，上の 3 項には

$k(AA-BB)=q(k.AA-k.BA)-p(k.BB-k.AB)$の関係が成り立つ. この式の両辺を$k$で割ると,

$$AA-BB=q.AA-q.BA-p.BB+p.AB$$

$$(1-q)AA-(1-p)BB=p.AB-q.BA$$

$p+q=1$より,

$$p.AA-q.BB=p.AB-q.BA$$

$$p(AA-AB)=q(BB-BA)$$

$$\frac{q}{p}=\frac{AA-AB}{BB-BA}$$

となる. 最後の式は B が A に勝つ勝算（オッズ）であり，コンウェイのアルゴリズムが証明されたことになる.

５. トランプのゲームに適用

以上，ペニーのゲームをコイン投げによるコインの裏表で説明してきたが，このような面白い確率のゲームをもっと身近なものに適用できないかと，知人のスティーブ・ハンブルと私は考えた. コインのトスは表と裏が等確率といえ本当に 1/2 である保障はできない. ルーレットの赤と黒だって同じである. また，コイ

ン投げは操作が意外と難しいこと，表と裏を記録していかねばならないこと等の難点がある．　そこで考えたのが，トランプのカードである．

トランプは 52 枚あるが，スペードとクラブは黒色でダイヤとハートは赤色で，26 枚の黒色と 26 枚の赤色に注目するとコインの表と裏に代用できる．Blacks の B を黒で，Reds の R を赤で表すとすれば，コインでの HHH 対 THH は，トランプでは BBB 対 RBB となる．

トランプによるゲームの利点は，操作がしやすい，コインのように記録する必要がない，良質な乱数が期待できる等があげられる．トランプの 52 枚は適度な試行回数を与えてくれる．コインの場合はゲームの終わりが決めにくいが，トランプの場合は 52 枚で終わることができる．問題は，はたしてゲームとして成立するかということだ．52 枚のカードで何回くらいの試行が行えるかは，つぎのコリングスの理論からも示される．A または B が表れる平均待ち時間 $E(N)$ は，

$$E(N) = k(p.AA + q.BA)$$

または

$$E(N) = k(p.AB + q.BB)$$

として求まる[3]．A または B が表れる平均待ち時間は，集合では $A \cup B$ に対応している．

表３に示すように E(N)の値は対戦によって違い, BBB 対 RBB の場合は 7 で, BRR 対 BBR の場合は 16/3 である．平均待ち時間 E(N)は勝敗に必要なカード枚数に対応する．したがって，カード総数 52 枚をこの値で割ると試行回数になる．理論値の試行数は 7.4 回～9.8 回に分布するが，この値は実際にトランプで試した時の統計的な値（７～10 回）とよく合っている．

A	B	AA	BB	AB	BA	p	q	E(N)	試行数
BBB	RBB	7	4	0	3	1/8	7/8	7	7.4
BBR	RBB	4	4	1	3	1/4	3/4	13/2	8
BRB	BBR	5	4	1	2	1/3	2/3	6	8.7
BRR	BBR	4	4	0	2	1/3	2/3	16/3	9.8
RBB	RRB	4	4	0	2	1/3	2/3	16/3	9.8
RBR	RRB	5	4	1	2	1/3	2/3	6	8.7
RRB	BRR	4	4	1	3	1/4	3/4	13/2	8
RRR	BRR	7	4	0	3	1/8	7/8	7	7.4

表 3. トランプでの平均試行数　（E(N)：平均待ち時間）

表３より，BBB と RBB では確率が 1/8 と 7/8 で，RBB の勝算が BBB の勝算の 7 倍で圧倒的に RBB の方が有利である．ところが，RBR と RRB では RRB の勝算が２倍でしかない．低い倍率なので一回の試行では RRB が勝つとは必ずしも言えない．そのために，試行を n 回行うとすれば，RRB が勝つ確率は増加する．たとえば３回の試行なら２勝１敗も B の勝利となり，７回の試行なら４勝３敗でも B の勝利となる．これを数式で示せば次のようになる．P(RRB, n)を n 回試行したときの RRB の勝率とすれば,

$$P(RRB,7) = {}_7C_7\left(\frac{2}{3}\right)^7 + {}_7C_6\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$+ {}_7C_5\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_7C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0.827$$

となり，１回の試行の勝率が 0. 667 であることに比べると，明らかに B が有利になっていく．トランプでは７回～９回の試行が行えるので，すべての対戦において高い確率で B が勝利することが期待できる．

以上，ペニーのゲームはトランプでの適用が可能であり，コイン投げより優れていると判断して，トランプによる新しいバージョンを「ハンブル・西山のゲーム」ということにした．どこの家にもトランプがあるので，読者はいちど試してください．

参考文献

[1] Walter Penney, 95. Penney-Ante, Journal of Recreational Mathematics, 2(1969), 241.
[2] Martine Gardner, Mathematical Games, Scientific American, October 1974, 231(4), 120-125.
[3] Stanley Collings, Coin Sequence Probabilities and Paradoxes, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications, 18, November/December 1982, 227-232.

（にしやまゆたか／大阪経済大学）